数理解析研究所講究録
568 巻 1985 年 172-184

Hyperbolic geometry and 3-manifolds
問題集

松元重則 (S. Matsumoto), 坪井俊 (T. Tsuboi), 矢野公一 (K. Yano)

I. $SL_2\mathbb{C}$

(1.1) M : closed oriented 3-manifold
Σ : 1-graph, valency $=3$
このとき (いつ) uniformizable か？
i.e. $\exists \rho : \pi_1(M\setminus\Sigma) \to SL_2\mathbb{C}$
s.t. $\rho(\text{meridian}) = \text{elliptic of } 2\pi/n$
かつ $\mathrm{Im}\,\rho$: discrete

(加藤, 相馬)

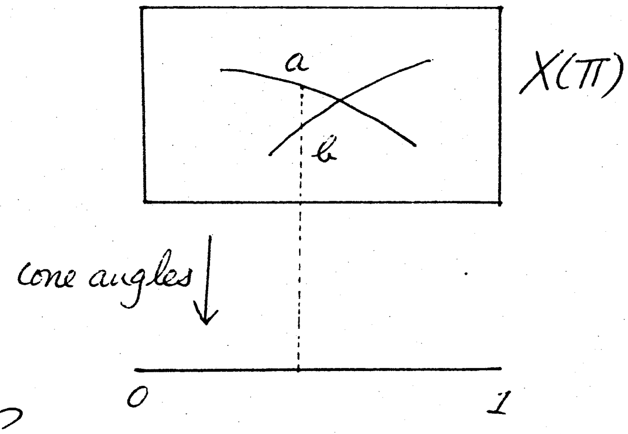
(1.2) hyperbolic 3-cone-manifold は cone angle を指定して rigid か？

(吉田)

(1.3) (1.1)の記号の下に $\pi=\pi_1(M\setminus\Sigma)$ とし

$R(\pi)=\{\rho:\pi\to SL_2\mathbb{C}\}$, $X(\pi)=R(\pi)/_{\text{conj. by } SL_2\mathbb{C}}$

とするとき 幾何的実現可能なもので分岐が可能か？



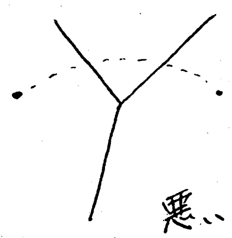
(If YES, $^\exists a, b$ の幾何的実現 N_a, N_b で N_a と N_b は cone angle が等しくかつ metric space として近いが、異なる holonomies a, b を持つ

(相馬)

(1.4) cusped hyperbolic 3-manifold は ideal 3-simplex で分割できるか？

(吉田)

(1.5) hyperbolic 3-manifold の Dirichlet domain は良い性質を持つか？


悪い図

(If YES, (1.4) は肯定的

(坪井)

(1.6) Euclidean 3-cone manifold with singularities は いつ spherical and/or hyperbolic 3-cone manifold の limit になるか？ 更に cone manifold の変形に

よる 8つの geometry の隣接関係を記述せよ。

（小島）

<u>Remarks</u> (i) 2次元は O.K.

(ii) 一般にはダメ（まくら × S^1）（相馬）

(iii) complement hyperbolic ならどうか？

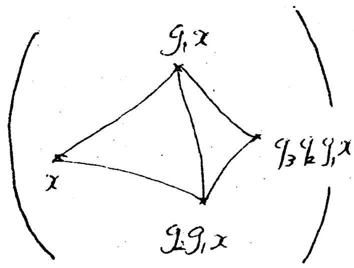
(1.7) hyperbolic 3-cone manifold の deformation で hyperbolic 3-cone manifold structure が入る cone angle ($\leq 2\pi$) は連結か？　また Dehn surgery deformation ではどうか？

（大鹿）

(1.8) a) hyperbolic 3-manifold の volume は $\mathbb{Q}$ 上 1次独立か？

b) $\mathrm{Image}(vol : H_3(SL_2\mathbb{C}) \to \mathbb{R}) = ?$

$vol(g_1, g_2, g_3) = vol$



$\mathbb{H}^3$

c) $\Lambda^2 vol : H_6(SL_2\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ は自明か？

（森田）

d) 一般に s.s. Lie 群の "不連続不変量" は自明か？

(1.9) hyperbolic 3-manifold の isometry group を決定せよ。

（河内）

<u>Remark</u> Given G freely acting on 3-manifold M,

$\Rightarrow \exists M^*$ hyperbolic 3-manifold, homology equivalent to M s.t. $G \hookrightarrow \mathrm{Isom}(M^*)$.

II. $\pi_1(\Sigma_g)$, $\mathcal{M}_g$

(2.1) $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$ に対する $X(\Gamma)$ (cf. 1.3) を $\mathcal{M}_g$ 作用つきで調べよ。 (吉田)

(2.2) Γ 同上, $X = R(\Gamma, SL_2\mathbb{R})/\mathrm{conj}$ とする。

a) X の連結成分を決めよ。

b) $SL_2\mathbb{R}$ を $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ としたらどうか?

c) closed hyperbolic 3-manifold で, $SL_2\mathbb{C}$ としたらどうか? (三松)

(2.3) pseudo-Anosov f の mapping torus の volume を求めよ。 (三松)

とくに f の位相的 entropy と measured laminations の角度で記述できないか? (吉田)

(2.4) $\mathcal{M}_g$ は uniformly perfect か?

i.e. 任意の元が一定限度以下の交換子積で書ける。 (森田)

(2.5) a) surface bundle が handle body bundle に拡張する為の障害を求む。

b) surface bundle が fibrewise bordant たるための障害を求む。

以上の障害の何らかの reduction として森田特性類があらわれるか？

(加藤)

(2.6) $f:\Sigma_g\to\Sigma_g$ pseudo Anosov,

M_f : f の Heegaard manifold とするとき

$\exists k$ s.t. $\forall n \geq k$, $\pi_1(M_{f^n}) \neq \{1\}$?

(吉田)

III. Bounded cohomology

(3.1) a) $H^3_b(M^3;\mathbb{R})$ M^3: hyperbolic は無限生成か？

($\neq 0$ は known)

b) $H_b^2(PSL_2\mathbb{Z};\mathbb{R}) = ?$ (何もわかっていない)

c) M^n: hyperbolic に対し {bounded measurable functions}

$\rightarrow H^n_b(M;\mathbb{R})$ が定義されるが、この写像を調べよ。

例えば $1:1$ か？ onto か？

(三松)

(3.2) 次のいずれかを証明せよ。

1° $H_b{}^q(\Sigma_g;\mathbb{R})=0$ for $\forall q\geq 4$

2° $H_b{}^q(\Sigma_g;\mathbb{R})\neq 0$ for $\forall q\neq 1$.

(森田)

2°について $f:\Sigma_g\rightarrow N^n$; N^n 負曲率 より引き戻すことによって non-trivial element が構成できないか？

(吉田)

IV. Knots

(4.1) prime amphicheiral knot で non-trivial free period をもつものがあるか？ (作間)

<u>Remarks</u> (i) 存在しても period は 2 に限る。

(ii) hyperbolic ならない。

(iii) composite ならば存在する。

(4.2) a) Alexander – Conway polynomial は Jones polynomial よりも真に弱いか？ (村上)

<u>Remarks</u> (i) Alexander ideal が異なる 上の両 polynomial の一致する link あり。

(ii) Alexander module → Conway polynomial であるが Jones polynomial については Alexander modules が同じでも異なるものあり。 (金信)

b) Jones polynomial $= 1 \Longrightarrow$ trivial knot ? (村上)

多分 No (河内)

c) 下の図式の空欄を埋めよ。 (村上)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{\text{links}\} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \{\text{Conway poly}\} \\ & \{\text{Seifert matrices}\} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \text{に対応して} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] \{\text{links}\} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \{\text{Jones poly}\} \\ & \boxed{} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

<u>Remark</u> ここは Alexander modules とすべきである。 (金信)

(4.3) unknotting number = 1 の knot を求めよ. (村上)

ここで K の unknotting number = 1

$\Longleftrightarrow$ K の double cover はある strongly invertible knot $\tilde{k}$ から $p/2$ (p: odd) - surgery で得られ, その covering transformation は $\tilde{k}$ の strong invertibility を与える involution から自然に導びかれるものになっている。

Remarks (i) 上の同値関係より K が 2-bridge なら判定可能 (Culler-Shalen-Gordon-Litherland (村上)

(ii) (i)の一般化として pretzel knot $K(p, q, r)$ の double cover = S^2 上の Seifert fibered space で index (p, q, r). そこでそのような Seifert fibered space について上のような $\tilde{K}$ をさがせ。

(4.4) W^3: connected oriented irreducible open 3-manifold $\pi_1(W^3)$ は finitely generated とする

a) いつ W は compact 3-manifold に埋め込めるか?

b) 更に inclusion が π_1 上 mono に埋め込める条件は?

c) W がある (wild) knot $\subset S^3$ の exterior になる条件は? (垣水)

(4.5) Vol $=\infty$ の hyperbolic 3-manifold の end は topological に tame ($\approx$ 曲面 $\times [0, \infty)$) か? (小島)

(4.6) open 3-manifold に対し compact 多様体の内部に同相ではないが universal covering が R^3 となる為の criterion を求む。 (小島)

(4.7) $M^3 \supset S$ onesided incompressible surface

S' : S と homotopic な surface

$\Rightarrow \exists f : M \circlearrowleft$ homeo, isotopic to id s.t. $f(S) = S'$?

特に $M \setminus U(S)$ が handlebody のときなど (大鹿)

(4.8) a) $S^4 \supset K_1, K_2$: smooth 2-knots

$\forall n,\ B_n(K_1) \approx B_n(K_2)$ (n fold cyclic branched covering)

$\Rightarrow (S^4, K_1) \approx (S^4, K_2)$ diffeomorphic? (宮崎)

Remark Classical knot の時と全く同様に2つの non-invertible knot を方向を逆転させて connected sum することにより反例を得る。従ってこの様な例を除外して考えるべきです。単純には "prime knot ではどうか" となるが，2-knot に対しては "prime"，"prime 分解" が存在するかどうかは不明で，この困難から逃げる為に (4.8)a) を knot group が "prime" である 2-knot の範囲内で考えるのはどうでしょう。

(cf. T. Maeda "A unique decomposition for knot-like groups," Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 6 (1978); knot group の primeness に関して)

K_1 : unknot のときは特に興味深いが，この場合問題が unknotting problem と同値かどうかは不明。 (作間)

b) $W^5 = H^0 \cup \bigcup_{j=1}^{n} H_j^1 \cup \bigcup_{j=1}^{n} H_j^2$ (H_j^i : i-handle)

$\pi_1(W^5) = 1 \Longrightarrow W^5 \approx B^5$?

c) $S^4 \supset K$: 2-knot, $Br(K)$: 1-connected

$\Longrightarrow Br(K) \approx S^4$?

特に K: ribbon のとき $Br(K) = \partial(M^4 \times I)$ かつ $M^4 \times I$ が b) の分解をゆるす M^4 が存在する。よって、このときは b) ⇒ c). (宮崎)

(4.9) 2-knot の prime decomposition は存在するか？存在するとすれば、その分解は unique か？

<u>Remark</u>. 群レベルでは unique prime decomposition が存在する（T. Maeda (前出 (4.8)a)). 存在証明に誤りがあったが、著者自身により、最近、正しい証明がつけられている。）もし、unknotting conjecture が正しければ群レベルで prime decomposition が存在することより、2-knot の prime decomposition の存在がいえる。 (作間)

V. Geometric limit (深谷)

(5.1) M_i^n: Riemannian manifolds

$\lim M_i^n = X$: compact metric space のとき次を示せ。

a) $\forall p \in X$, $\exists$ neighborhood $U \ni p$ s.t. $U \cong \mathbb{R}^{\dim X}/T$

ここで T は torus の有限群による拡大で $\mathbb{R}^{\dim X}$ に isometric に act.

(これは成立する。深谷 60年9月)

b) 十分大なる i に対し $f_i : M_i \to X$ が存在して

b-1) $X_0 \equiv \{x \in X \,;\, \exists U_x \ni x \;\; U \cong \mathbb{R}^{\dim X}\}$ に対し

$f_i^{-1}(X_0) \xrightarrow{f_i} X_0$ は fibre bundle with infranil manifold F as a fibre。

b-2) $x \in X$ の近傍が $\mathbb{R}^{\dim X}/T$ と同型であれば

$f_i^{-1}(x) \cong F/T$ 。

(5.2) $M \to N$ fiber bundle with a infranil manifold as a fiber とするとき，M 上の metric g_i の列で

$|\text{sec. curv. of } g_i| \leqq 1$, $\lim (M, g_i) = N$

なるものを見つけよ。特に S^1 上の T^2-bundle はどうか？

$\boxed{\text{VI. Elliptic surfaces (上)}}$

(6.1) $\pi : S \to \Delta$ を multiple torus 以外の singular fiber をもたない elliptic surface (holomorphic Seifert fibering) とする。

a) S の diffeo type は $\pi_1 S$ で決まる？

<u>Remarks</u> (i) Δ: hyperbolic or Euclidean orbifold で O.K. (Zieschang - 坂本 - 篠原 etc.)

(ii) Δ: spherical with 3-singularities のとき 不明。

(iii) Δ: spherical with # singularities $\leqq 2$ のとき NO (Hopf surface)。

b) 各々にどのような geometric structure が入るか？
その deformation space はどのようなものか？

(6.2) elliptic surfaces $\{ L_{a_1}(m) L_{a_2}(n) V_g$;
V_g は $\mathbb{C}P^1$ 上 $\chi V_g = 12(g+1)$ の multiple fiber のない elliptic surface, $\gcd(m, n) = d \}$ $d \neq 1$

但し，$L_a(m)$ は logarithmic transformation with multiplicity m

これらはすべて $\pi_1 \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \neq 1$. これらの homotopy type は何で決まるか？ intersection form と w_2 だけで決まるか？

<u>Remark</u> C.T.C. Wall も同じ問を発している。

(6.3) $\pi: S \to \Delta$ を (6.1) と同様とするとき
singular fibering が unique でないものはどれか？

<u>Remark</u> Δ: Euclidean のとき base orbifold の異なる fibering を許すものがある。

(6.4) Intersection form $(H_2(M;\mathbb{Z}), \cdot)$ は even type だが spin でない (i.e. $H_1(M;\mathbb{Z}_2)\neq 0$) closed 4-manifold M で intersection form $2E_8+U$, $2E_8$ は実現可能か?

<u>Remark</u>. $2E_8+2U$ は実現可能 (Fintushel-Stern)。

(6.5) $\Sigma(2,3,7)$ は torsion in $\mathcal{H}^3$ か?

VII. Miscellaneous

(7.1) M^3: compact hyperbolic 3-manifold 上の non-singular flow を universal covering $\mathbb{H}^3$ に lift したとき, orbit はいつ $S_\infty = \partial\mathbb{H}^3$ の一点に収束するか? (矢野)

<u>Remark</u> 任意の orbit が任意の compact subset から出てしまわないと反例がある。もし収束がいえても連続にはならない。

(7.2) M: 3-dimensional open contractible manifold, 1-connected at ∞

$\Longrightarrow$ $\exists$ complete Riemannian metric $\exists$ complete conformal vector field u

s.t. u の singular point はすべて source or sink。

(足立)

(7.3) compact leaf を持たない codimension 1 foliation を許さない 3-manifold をみな挙げよ。（松元）

(7.4) T^2上の foliated S^1-bundle の G.V. 類 $=0$ たる事実の簡単な証明を求む。（三松）

(7.5) compact 3-manifolds に対し、G-homotopy 同値は G-homotopic to G-stratified 同値か？
但し、G: properly discontinuous, G^u: finite.

（加藤）

以上